Teoretická část - 3.6.2021

1. (a) Definujte metrický prostor, úplný metrický prostor a kontraktivní zobrazení (3 body).

   (b) Zformulujte a dokažte Banachovu větu o kontrakci (3 body).

   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      i. nechť (M, ρ) a (X, d) jsou metrické prostory, potom zobrazení $\phi : (M \times X) \times (M \times X) \to \mathbb{R}$ definované jako $\phi((a, x), (b, y)) = \rho(a, b) + d(x, y)$ je metrikou na množině $M \times X$,

      ii. nechť (M, ρ) a (X, d) jsou metrické prostory, potom zobrazení $\phi : (M \times X) \times (M \times X) \to \mathbb{R}$ definované jako $\phi((a, x), (b, y)) = \rho(a, b) \cdot d(x, y)$ je metrikou na množině $M \times X$.

      (2 body).

2. (a) Definujte číselnou řadu a její součet (2 body).
   (b) Zformulujte Abelovo a Dirichletovo kritérium, podílové kritérium a odmocninové kritérium konvergence řad (3 body).
   (c) Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
      i. existuje posloupnot $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverguje,
      ii. existuje posloupnot $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ diverguje,
      iii. existuje posloupnot $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje,
      iv. existuje posloupnot $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ kladných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konverguje a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

      Vše řádně zdůvodněte (3 body).

3. (a) Definujte obyčejnou diferenciální rovnici a řešení obyčejné diferenciální rovnice (2 body).

   (b) Zformulujte větu o řešení rovnice se separovanými proměnnými (2 body).

   (c) Zformulujte a dokažte větu o řešení lineární rovnice 1. řádu (3 body).

   (d) Nechť $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce a nechť f a g jsou řešeními rovnice

$$y' + \phi y = \psi$$

   na $\mathbb{R}$ splňujícími $f(1) = g(1)$. Za pomoci věty o řešení lineární rovnice 1. řádu dokažte, že $f = g$ na $\mathbb{R}$ (1 bod).